

Matematica generale: esonero del 13 novembre 2012

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 *il compito verrà considerato insufficiente*.

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Siano dati i seguenti insiemi A, B, C, D .

$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } 5 - 3x \geq 2\}, \quad B = \{-1, 2, 3\}, \quad C = \{n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } -3 < n < 3\}, \quad D = I(1, 3).$$

- (a) Descrivere $A \times B, C \times D$ nel piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- (b) Descrivere $(A \times B) \cap (C \times D)$ nel piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- (c) Descrivere sulla retta reale \mathbb{R} gli insiemi $A \cup B$ e $C \cap D$.

2. Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x^2 + 11}{9 - x^2} < 1.$$

3. Siano date le seguenti funzioni:

$$f(x) = \ln(x - 1), \quad g(x) = \ln\left(\frac{3}{2 + 3x}\right), \quad h(x) = |2x + 3|.$$

- (a) Determinare il campo di esistenza di f, g, h .
- (b) Determinare il campo di esistenza, l'immagine e l'inversa (se esiste) di f .
- (c) Dire se esiste, e se esiste calcolare, $g \circ f$.
- (d) Dire se esiste $g(-5)$, e calcolare, se esiste, $g'(-5)$.
- (e) Determinare il campo di esistenza di g' .
- (f) Dire se esiste, e in caso affermativo calcolare,

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^-} g(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^+} g(x).$$

- (g) Dire se h è continua, e se non lo è dire in quali punti non lo è e perché.
- (h) Dire se h è derivabile, e se non lo è dire in quali punti non lo è e perché.

4. Sia a_n la successione data da

$$a_n = \frac{2^{2n} + 1}{4^n}.$$

- (a) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

- (b) Dire se esiste, e in caso affermativo calcolare,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

- (c) Dire se esiste, e in caso affermativo calcolare,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1} - 8}{3^n}.$$